MATEMATYKA

Lista 3 (liczby zespolone, ciągi liczbowe)

Zad 1. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiory:
$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}\,(z) \le 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| \ge |z - 4 + 2i|\}$,
$C = \{z \in \mathbb{C} : |z + 4 + 6i| \le |z + 1 + 7i| \le |z + 5 + 5i|\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg z \le \frac{2\pi}{3}\}$,
$E = \{z \in \mathbb{C} : \arg\,(z - 2 + i) = \pi\}$, $F = \{z \in \mathbb{C} : \pi \le \arg\,(iz) < 2\pi\}$.

Zad 2. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
(a) $-\sqrt{7}$, (b) $-2i$, (c) $1 + i$, (d) $\sin\alpha - i\cos\alpha$,
(e) $-1 + i\sqrt{3}$, (f) $-\sqrt{3} - i$, (g) $(\sqrt{3} - i)^{20}$, (h) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{2009}$

Zad 3. Obliczyć wartości podanych wyrażeń
(a) $(\cos\frac{\pi}{11} + i\sin\frac{\pi}{11})^{121}$, (b) $\frac{3i}{1+i}$, (c) $\frac{(1+i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^{15}}$, (d) $\frac{2+2i}{1-i}$, (e) $\frac{1-\sqrt{3}i}{3+i}$, (f) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ dla $n > 2$.

Zad 4. Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:
(a) $\sqrt{3 - 4i}$, (b) $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$, (c) $\sqrt[3]{-27i}$, (d) $\sqrt[4]{-4}$
(e) $\sqrt[6]{-64}$, (f) $\sqrt[3]{-1 + i}$, (g) $\sqrt{8 - 8i}$, (h) $\sqrt[3]{(1 + i)^3}$

Zad 5. Zbadaj ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$ *b)* $a_n = \dfrac{3^n}{3^n + 2}$ *c)* $a_n = \sqrt[4]{n^4 + 4}$
d) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ *e)* $a_n = 1000 - \sqrt{n}$ *f)* $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Zad 6. Zbadaj monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *b)* $a_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ *c)* $a_n = \dfrac{n^2}{n^2 + n + 2}$
d) $a_n = \dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$ *e)* $a_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$ *f)* $a_n = (1 + \frac{1}{1^2})(1 + \frac{1}{2^2})\ldots(1 + \frac{1}{n^2})$

Zad 7. Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$ b) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$
c) $a_n = \frac{\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[3]{8^n+1}}$ d) $a_n = 2^{-n}\cos n\pi$
e) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$ f) $a_n = \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$
g) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\binom{n}{2}}$, $n \ge 2$ h) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$
i) $a_n = \left(\frac{n-4}{n}\right)^{3-n}$ j) $a_n = \frac{(2n+1)3^n}{n(2^n+1)}$
k) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ l) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{6n}$
m) $a_n = (-n^2 - 7)$ n) $a_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$
o) $a_n = \frac{\cos(n!)}{n}$ p) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2+1}$
q) $a_n = \frac{2n}{n^3+1}$ r) $a_n = \frac{5n^6-3n^4+2}{5-10n^6}$
s) $a_n = \frac{3n^2+2n}{4n^2+3n+1}$ t) $a_n = \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n$
u) $a_n = \sqrt{n+5} - n$ v) $a_n = \frac{2n^2-1}{(n+1)^2}$

Zad 8. Korzystając z własności ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego oblicz granice ciągów:

$$a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2} \qquad b_n = \frac{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}{2 + 4 + \cdots + 2n}$$

$$c_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$$